引文格式:袁寒箫,唐秋华,艾松涛,等.海洋声速的稀疏表示方法比较与重构性能分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(4):714-725.DOI:10.13203/j.whugis20240282

Citation: YUAN Hanxiao, TANG Qiuhua, AI Songtao, et al. Comparison of Sparse Representation Methods and Reconstruction Performance Analysis for Ocean Sound Velocity[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2026, 51(4): 714-725.DOI:10.13203/j.whugis20240282

海洋声速的稀疏表示方法比较与重构性能分析

袁寒箫[1,2,3] 唐秋华[4] 艾松涛[1,2,3] 刘 杨[4]

1 武汉大学中国南极测绘研究中心,湖北 武汉,430079

2 极地环境监测与公共治理教育部重点实验室(武汉大学),湖北 武汉,430079

3 武汉大学测绘学院,湖北 武汉,430079

4 自然资源部第一海洋研究所,山东 青岛,266061

摘 要:准确重建二维声速剖面及三维海洋声速场对于众多海洋声学应用至关重要,但广阔海域中声速的时空差异和随时间变化的不确定性使其成为一项困难的任务。针对海洋声速信息重构精度受限的问题,基于经验正交函数(empirical orthogonal function,EOF)、字典学习(dictionary learning, DL)和张量分解(tensor decomposition, TD)3种主流声速稀疏表示方法研究了二维声速剖面和三维海洋声速场的稀疏表示效果和数据重构精度。结果表明,在二维声速数据的稀疏表示中,DL方法在全球范围内表现出更优的重构效果,大部分海域的重构误差仅为0.2 m/s。DL方法在深度方向和时间维度上比EOF方法表现出更高的稳定性,更适合用于二维声速数据的稀疏表示。对于三维声速场,TD方法通过多个因子矩阵有效捕捉声速的三维空间变化特点,适用于三维声速数据的稀疏表示。在大幅减少参数数量的同时,TD方法实现了更加稳定且精度更高的重构结果,整体重构误差为0.21 m/s。

关键词:海洋声速;稀疏表示;EOF;DL;TD

中图分类号:P229 **文献标识码**:A **收稿日期**:2025-06-15

DOI:10.13203/j.whugis20240282 **文章编号**:1671-8860(2026)04-0714-12

Comparison of Sparse Representation Methods and Reconstruction Performance Analysis for Ocean Sound Velocity

YUAN Hanxiao[1,2,3] *TANG Qiuhua*[4] *AI Songtao*[1,2,3] *LIU Yang*[4]

1 Chinese Antarctic Center of Surveying and Mapping, Wuhan University, Wuhan 430079, China

2 Key Laboratory of Polar Environment Monitoring and Public Governance (Wuhan University), Ministry of Education, Wuhan 430079, China

3 School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China

4 First Institute of Oceanography, Ministry of Natural Resources, Qingdao 266061, China

Abstract: **Objectives**: Ocean sound velocity is a fundamental element of marine environmental observation, and accurate sound velocity information is critical for ocean exploration, underwater communication, navigation, and localization. Accurately reconstructing two-dimensional sound velocity profiles (SVP) and three-dimensional ocean sound velocity fields (SVF) is crucial for various ocean acoustics applications. However, the spatial and temporal variations and uncertainties in sound velocity across the vast ocean make this a challenging task, necessitating further investigation into sparse representations of ocean sound velocity. **Methods**: To address the problem of limited reconstruction accuracy of ocean sound velocity information, we propose a sparse representation method based on three mainstream approaches: Empirical orthogonal function (EOF), dictionary learning (DL), and tensor decomposition (TD). The sparse representation effects and data reconstruction accuracies of 2D SVP and 3D ocean SVF are investigated using global ocean

基金项目:国家重点研发计划(2024YFC2816301,2023YFC2809100);国家自然科学基金(42376185)。

第一作者:袁寒箫,博士生,主要从事海洋测绘研究。yuanhanxiao1232021@163.com

通信作者:艾松涛,教授。ast@whu.edu.cn

Argo (array for real-time geostrophic oceanography) grid data. For 2D sound velocity information, we extend to a global scale, analyzing the determination of EOF order and grid sparsity, and comprehensively comparing the reconstruction results of the EOF and DL methods. For the 3D sound velocity field, the Central Pacific Ocean serves as the experimental area. The parameter information for EOF, DL, and TD methods is determined based on the training set, and the reconstruction results for the test set are analyzed to assess the data reconstruction accuracies of the three methods. **Results:** The results demonstrate that in the sparse representation of 2D sound velocity data, DL method demonstrates superior reconstruction performance on a global scale, achieving reconstruction errors as low as 0.2 m/s in most sea regions. Additionally, DL method shows greater stability in both the depth and time dimensions compared to EOF method, making them more suitable for sparse representation of two-dimensional sound velocity data. For the three-dimensional sound velocity field, the tensor decomposition method effectively captures the spatial variability of sound velocity through multiple factor matrices. This approach is well-suited for the sparse representation of three-dimensional sound velocity data, significantly reducing the number of parameters while delivering more stable and accurate reconstruction results, with an overall reconstruction error of 0.21 m/s. **Conclusions:** To draw a conclusion, these experimental findings provide practical guidance for the compression and feature extraction of multidimensional sound velocity information, thereby improving the reconstruction and inversion accuracy of ocean sound velocity.

Key words: ocean sound velocity; sparse representation; EOF; DL; TD

海洋声速是海洋环境观测的基本要素之一，准确的声速信息对于海洋探测、水下通信、水下导航定位具有重要的科学研究和应用价值[1-2]。稀疏表示是信号处理中的一种技术，旨在用尽可能少的非零系数来表示原始信号[3]。对于海洋声速信息，稀疏表示解释为利用声速数据学习降维算法的基函数，并计算对应的系数矩阵；数据重构是指基于降维方法的基函数和对应的系数矩阵恢复原始数据的过程[4-5]。在海洋声速反演研究中，通过对声速信息稀疏表示，可以显著减少需要估计的未知参数数量，从而使原本不确定的声速反演问题易于实现[6-7]。在水下通信领域，通过对声速等信息进行稀疏表示可以实现数据的压缩，有效减少了信息传递数量[8-9]。

经验正交函数(empirical orthogonal function, EOF)是较为经典的声速剖面(sound velocity profile, SVP)稀疏表示方法，在声速反演研究中得到了广泛应用[10-15]。文献[16]通过实验验证了EOF是稀疏表示SVP的有效基函数；文献[17]在EOF的基础上提出了一种高效的世界SVP数据分析技术，能够对数据集进行大程度的压缩。字典学习(dictionary learning, DL)是一种表征学习方法，文献[6]于2017年首次将其应用在SVP的稀疏表示中，相比EOF方法，DL不受正交性约束，可以有效地拟合原始数据。后续相关学者进一步对EOF和DL稀疏表示展开了对比分析[18-19]。另外，基于DL的压缩感知方法在SVP反演研究中也得到了广泛研究[20-22]。对于三维海洋声速场(sound velocity field, SVF)的稀疏表示，文献[4]将基函数学习与张量分解(tensor decomposition, TD)联系起来，首次将基于张量的基函数学习框架应用于三维海洋SVF的稀疏表示。文献[23]将DL和张量基函数学习框架结合，提出了一种三维SVF稀疏表示的张量DL算法。此外，也有研究将张量计算与神经网络结合，以充分地分析重构误差，构建平衡的SVF稀疏表示模型[24]。

本文基于初始的EOF、DL和TD方法，研究了二维SVP和三维SVF的稀疏表示和数据重构。在二维SVP的稀疏表示中，将研究区域扩大至全球，分析了全球范围内EOF阶数的选择，对比分析了EOF与DL两种方法的重构误差水平分布，以及在深度方向和时间维度的误差变化。在三维SVF的稀疏表示中，依据训练集数据确定了EOF、DL与TD 3种方法的参数信息，通过对测试集的重构结果进行综合分析，讨论了各个方法的优缺点，结果表明TD方法更加适用于三维SVF的稀疏表示。

1　研究方法与实验数据

1.1　EOF

EOF本质上是实对称矩阵的特征向量[25]。假设获得了N个历史SVP，其中每个剖面均包含

M个垂直标准层,可以用矩阵$\boldsymbol{C}=[c_1\ \ c_2\ \ \cdots\ \ c_n]\in\mathrm{R}^{M\times N}$表示:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{M1} & c_{M2} & \cdots & c_{MN} \end{bmatrix} \tag{1}$$

计算$\boldsymbol{C}$中每一行的平均值,得到一个$M\times 1$的行均值向量,沿列方向复制扩展为$M\times N$维,得到背景SVP,表示为$\bar{\boldsymbol{C}}\in\mathrm{R}^{M\times N}$。$\boldsymbol{C}$与$\bar{\boldsymbol{C}}$之间的差异称为声速扰动,表示为$\Delta\boldsymbol{C}\in\mathrm{R}^{M\times N}$。$\Delta\boldsymbol{C}$为声速扰动矩阵,计算其协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}\in\mathrm{R}^{M\times M}$,并对协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$进行特征值分解,得到:

$$\boldsymbol{\Sigma V}=\boldsymbol{\Lambda V} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{v}_m]\in\mathrm{R}^{M\times M}$是特征向量矩阵;$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_m]\in\mathrm{R}^{M\times M}$为特征值矩阵。将特征值按从大到小的顺序排序,可以计算前K阶EOF的累积贡献率Q:

$$Q=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i/\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\times 100\% \tag{3}$$

当$Q\geqslant 95\%$时,一般认为前几阶主导的EOF能够有效解释SVF中的大部分扰动。对于前K阶EOF,声速矩阵$\boldsymbol{C}$可以表示为:

$$\boldsymbol{C}=\bar{\boldsymbol{C}}+\Delta\boldsymbol{C}\approx\bar{\boldsymbol{C}}+\boldsymbol{V}^K\boldsymbol{W} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{V}^K\in\mathrm{R}^{M\times K}$为前$K$个特征向量组成的EOF矩阵;$\boldsymbol{W}\in\mathrm{R}^{K\times N}$为$\boldsymbol{V}^K$的系数矩阵,可通过最小二乘法计算。

1.2 DL

EOF通过对声速扰动主成分分析来提取特征信息,进而实现稀疏表示;而DL是通过大量数据学习过完备字典,将原始数据表示为字典与系数的线性组合。其实现过程包括稀疏编码和字典更新两个步骤[26],稀疏编码是在字典固定的情况下,采用追踪算法找到最佳稀疏系数矩阵[27-28]。字典更新过程是以重构误差最小为准则,通过奇异值分解(singular value decomposition, SVD)与K均值结合的K-SVD算法循序更新字典和系数矩阵[29-30]。

通过DL稀疏表示声速矩阵$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{c}_1\ \ \boldsymbol{c}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{c}_n]\in\mathrm{R}^{M\times N}$,首先初始非正交过完备字典$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{d}_1\ \ \boldsymbol{d}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{d}_h]\in\mathrm{R}^{M\times H}$,矩阵$\boldsymbol{D}$的每一列向量$\boldsymbol{d}_h$表示一个原子,过完备性是指满足$H\gg M$。声速矩阵$\boldsymbol{C}$可以表示为字典$\boldsymbol{D}$的线性组合:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{DA} \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_n]\in\mathrm{R}^{H\times N}$为$\boldsymbol{D}$的稀疏系数矩阵。稀疏性是指$\|\boldsymbol{a}_n\|_0$满足$\|\boldsymbol{a}_n\|_0\leqslant T$。进一步变换式(5),得到:

$$\hat{\boldsymbol{a}}_n=\arg\min_{\boldsymbol{a}_n}\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{DA}\|_F^2\ \ \text{s.t.}\ \forall n\,\|\boldsymbol{a}_n\|_0\leqslant T \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{a}_n$为$\boldsymbol{A}$的列向量;$\hat{\boldsymbol{a}}_n$表示$\boldsymbol{a}_n$的最优估计;F表示Frobenius范数。将式(6)看作L2范数代价函数求解问题,可以采用正交匹配追踪算法求解$\boldsymbol{A}$。

字典更新是在得到矩阵$\boldsymbol{A}$之后,逐列更新字典矩阵,使得$\boldsymbol{C}$的重构误差最小。K-SVD作为先进的字典更新方法,迭代过程如下:固定矩阵$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{D}$的第h个列向量记为$\boldsymbol{d}_h$,同时与$\boldsymbol{d}_h$对应相乘的$\boldsymbol{A}$中第h个行向量记为$\boldsymbol{a}_T^h$,式(6)可以变换为:

$$\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{DA}\|_F^2=\left\|\boldsymbol{C}-\sum_{h=1}^{H}\boldsymbol{d}_h\boldsymbol{a}_T^h\right\|_F^2 \tag{7}$$

假设当前更新到了第j个原子,式(7)表示为:

$$\left\|\boldsymbol{C}-\sum_{h=1}^{H}\boldsymbol{d}_h\boldsymbol{a}_T^h\right\|_F^2=\|\boldsymbol{E}^j-\boldsymbol{d}_j\boldsymbol{a}_T^j\|_F^2 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{E}^j=(\boldsymbol{C}-\sum_{h\neq j}\boldsymbol{d}_h\boldsymbol{a}_T^h) \tag{9}$$

式中,$\boldsymbol{E}^j\in\mathrm{R}^{M\times N}$为更新至第$j$个原子时的误差矩阵,通过对$\boldsymbol{E}^j$进行SVD分解可以实现$\boldsymbol{d}_j$和$\boldsymbol{a}_T^j$的更新。依次更新后续的原子,在达到收敛条件或迭代次数之后,得到最优字典$\boldsymbol{D}$和系数矩阵$\boldsymbol{A}$,至此完成了DL稀疏表示二维声速信息的整个流程。

1.3 TD

海洋SVF反映了声速的三维分布,相较于二维SVP能够更全面地表示海洋内部空间中的声速变化。由于EOF和DL适用于处理二维矩阵,无法直接处理三维数据,在稀疏表示三维SVF时不能有效顾及声速的空间相关性。TD与DL的思想相似,可以将高阶张量表示为低阶张量乘积[31],即三维SVF可以表示为张量之间的乘积,从而实现SVF的稀疏表示。

将三维SVF转换为三维张量$\boldsymbol{C}\in\mathrm{R}^{M\times N\times Z}$,通过张量Tucker分解可以表示为:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{G}\times_1\boldsymbol{U}\times_2\boldsymbol{V}\times_3\boldsymbol{S} \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{G}\in\mathrm{R}^{R_1\times R_2\times R_3}$表示核张量,$(R_1,R_2,R_3)$为核张量的多维线性秩;$\boldsymbol{U}\in\mathrm{R}^{M\times R_1}$、$\boldsymbol{V}\in\mathrm{R}^{N\times R_2}$、$\boldsymbol{S}\in\mathrm{R}^{Z\times R_3}$分别表示不同维度的因子矩阵;$(\times_n,n=1,2,3)$表示张量与矩阵之间的乘积,也称模态积。图1展示了三阶张量Tucker分解的原理。

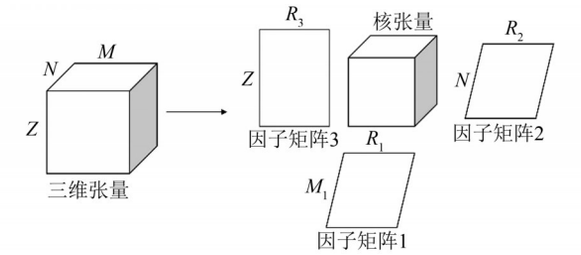


图 1　张量 Tucker 分解原理

Fig. 1　Diagram of Tensor Tucker Decomposition

将式(10)转化为 L2 范数代价函数的求解过程,得到:

$$\arg\min_{C,U,V,S}\left\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}\times_1\boldsymbol{U}\times_2\boldsymbol{V}\times_3\boldsymbol{S}\right\|_F^2 \tag{11}$$

为了保证张量 Tucker 分解的本征唯一性,需要对因子矩阵施加正交约束,即满足 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{I}_{R_1}$、$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{I}_{R_2}$、$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{I}_{R_3}$,$\boldsymbol{I}_{R_1}$、$\boldsymbol{I}_{R_2}$、$\boldsymbol{I}_{R_3}$分别表示不同阶的单位矩阵。初始化因子矩阵 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{S}$,核张量 $\boldsymbol{G}$ 可以表示为:

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}\times_1\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\times_2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\times_3\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

根据式(11)的优化问题,得到:

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}\times_1\boldsymbol{U}\times_2\boldsymbol{V}\times_3\boldsymbol{S}\right\|_F^2=\\&\left\|\boldsymbol{C}\right\|_F^2-2\left\langle\boldsymbol{C},\boldsymbol{G}\times_1\boldsymbol{U}\times_2\boldsymbol{V}\times_3\boldsymbol{S}\right\rangle+\\&\left\|\boldsymbol{G}\times_1\boldsymbol{U}\times_2\boldsymbol{V}\times_3\boldsymbol{S}\right\|_F^2=\left\|\boldsymbol{C}\right\|_F^2-\left\|\boldsymbol{G}\right\|_F^2=\\&\left\|\boldsymbol{C}\right\|_F^2-\left\|\boldsymbol{C}\times_1\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\times_2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\times_3\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\right\|_F^2\end{aligned} \tag{13}$$

式中,〈 〉表示张量之间的乘积。因此,式(11)的优化问题可以转化为:

$$\arg\max\left\|\boldsymbol{C}\times_1\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\times_2\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\times_3\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\right\|_F^2 \tag{14}$$

式(14)的优化问题可以通过交替最小二乘法进行求解。根据模态积的性质,TD 表达式可以写成矩阵形式:

$$\arg\max\left\|\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{(1)}\left(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{V}\right)\right\|_F^2 \tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{C}_{(1)}\in\mathbf{R}^{M\times(ND)}$ 表示张量 $\boldsymbol{C}$ 在第一维度展开得到的矩阵;$\otimes$ 表示矩阵之间的 Kronecker 积。在求解的过程中,当固定第 2、3 因子矩阵后,通过对 $\boldsymbol{C}_{(1)}\left(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{V}\right)$ 进行奇异值分解,使用其前 R_1 个左奇异值向量更新第 1 因子矩阵 $\boldsymbol{U}$。同理可以得到第 2、3 因子矩阵的更新方程:

$$\arg\max\left\|\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{(2)}\left(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{U}\right)\right\|_F^2 \tag{16}$$

$$\arg\max\left\|\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{(3)}\left(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{U}\right)\right\|_F^2 \tag{17}$$

式中,$\boldsymbol{C}_{(2)}$、$\boldsymbol{C}_{(3)}$分别表示张量 $\boldsymbol{C}$ 在第 2、3 维度的展开矩阵。分别对 $\boldsymbol{C}_{(2)}\left(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{U}\right)$和 $\boldsymbol{C}_{(3)}\left(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{U}\right)$进行奇异值分解来更新第 2、3 因子矩阵,由此实现了因子矩阵的一次更新,结合式(12)得到更新后的核心张量 $\boldsymbol{G}$,结合式(10)得到张量 $\boldsymbol{C}$ 的重构结果。当满足一定迭代次数或重构误差在阈值之内时,得到最终的核张量和因子矩阵。

1.4　实验数据

本文的实验数据来源于中国实时地转海洋学观测阵列计划(array for real-time geostrophic oceanography,Argo)实时资料中心所提供的基于梯度相关最优插值的全球网格 Argo 数据集(global gridded Argo dataset based on gradient-dependent optimal interpolation,GDCSM_Argo)[32],该数据集中包含了海水温度、盐度和声速等变量。该数据集的时间分辨率为逐年逐月,空间范围覆盖了全球海洋,水平分辨率为 1°×1°。水深范围为 0~2 000 m,分为 58 个不同间隔的水深层,水深间隔从海面到海底 5~100 m 不等。图 2 展示了 2022 年 6 月 GDCSM_Argo 数据的全球海面声速。

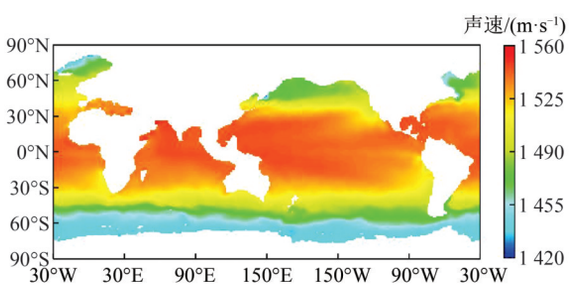


图 2　全球海面声速分布

Fig. 2　Global Distribution of Surface Sound Velocity

1.5　评价指标

为了评估不同方法对声速数据的重构精度,本文选择均方根误差(root mean square error,RMSE)、平均绝对误差(mean absolute error,MAE)和平均绝对百分比误差(mean absolute percentage error,MAPE)作为评估标准,计算公式为:

$$L_{\mathrm{RMSE}}=\sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{z=1}^{Z}\left(\hat{c}_{mnz}-c_{mnz}\right)^2}{MNZ}} \tag{18}$$

$$L_{\mathrm{MAE}}=\frac{\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{z=1}^{Z}\left|\hat{c}_{mnz}-c_{mnz}\right|}{MNZ} \tag{19}$$

$$L_{\mathrm{MAPE}}=\frac{1}{MNZ}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{z=1}^{Z}\left|\frac{\hat{c}_{mnz}-c_{mnz}}{c_{mnz}}\right|\times 100\% \tag{20}$$

式中,c_{mnz} 和 $\hat{c}_{mnz}$ 分别为声速真实值和重构结果;M、N、Z 分别表示声速数据各个维度的大小。

2 二维声速数据稀疏表示

2.1 实验数据预处理

在二维声速数据稀疏表示的实验中,主要研究EOF与DL两种方法对二维SVP的重构结果。选用2004-01—2022-09的全球GDCSM_Argo数据作为实验数据,将其划分为训练集和测试集,对应的时间跨度分别为2004-01—2018-12、2019-01—2022-09。

GDCSM_Argo数据将全球划分成了360×180个网格,在分析全球数据时,逐网格对SVP时间序列进行处理,每个网格中训练集数据对应行列数为180×58的声速矩阵,测试集数据对应行列数为45×58的声速矩阵。由于不同位置的水深不同,一些网格的深度小于2 000 m,即SVP层数小于58。对此本文制作一个掩膜,用于屏蔽水深小于500 m的海域,只保留水深层数大于34的网格,在全球范围内一共得到了34 748个网格。

2.2 训练集数据稀疏表示

在使用EOF表示SVP时,可以通过计算累积贡献率判断前K阶EOF的表示性能,而DL没有直接用于评估稀疏表示性能的参数,本文通过分析确定EOF的阶数,保持DL的稀疏度与EOF阶数相等,以保持两种方法的参数数量相等。

在分析不同阶数EOF的表示性能时,本文以累积贡献率大于95%为标准,统计了不同EOF阶数下全球海洋累积贡献率大于95%的网格个数,对应的比例以及整体RMSE如表1所示。可以发现,随着EOF阶数的增加,能够实现全球海洋的累积贡献率超过95%,同时整体RMSE逐渐降低。当采用前7阶EOF时,图3展示了此时全球海洋累积贡献率的分布,可以看到大部分海域都超过了95%,其余海域也达到了94%。因此,在后续的二维声速稀疏表示实验中,采用前7阶EOF作为基函数,DL的稀疏度设置为7。

首先,通过EOF和DL两种方法对训练集数据稀疏表示,得到了对应的基函数和系数矩阵;然后,重构训练集声速数据,与真实声速值对比并进行误差分析。图4展示了全球海洋每个网格的整体重构RMSE,EOF方法在不同海域呈现出不同大小的重构误差,大部分的误差位于0.2～0.4 m/s之间,在亚丁湾海域,西北太平洋黑潮延伸段以及北大西洋湾流附近的误差超过了0.6 m/s。相比之下,DL整体误差水平明显低于EOF,大部分区域的误差集中在0～0.2 m/s之间,表现更为出色。但同时也存在一些误差偏高的区域,分布位置与EOF方法相同,分析这些区域误差较大的原因,主要是这些区域存在较强的洋流活动,会引起海面及水下温盐参数的剧烈变化,导致海洋声速存在显著差异,使得重构误差增大。

表1 不同EOF阶数的参数信息

Table 1 Parameter Information Corresponding to Different EOF Orders

EOF阶数	网格数/个	比例	RMSE/(m·s^{-1})
1	3	0	1.225
2	1 778	0.051	0.757
3	15 818	0.455	0.535
4	26 905	0.770	0.412
5	32 676	0.940	0.333
6	34 319	0.988	0.277
7	34 657	0.997	0.236
8	34 741	1.000	0.204

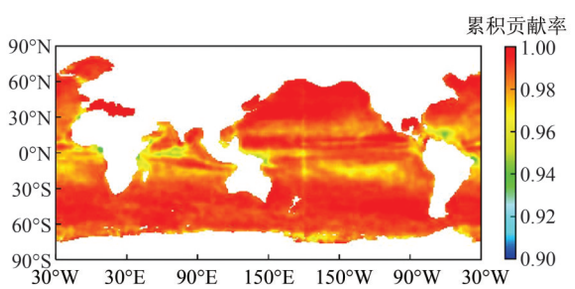


图3 全球前7阶EOF累积贡献率分布

Fig. 3 Global Cumulative Contribution Distribution of the First 7 EOF Orders

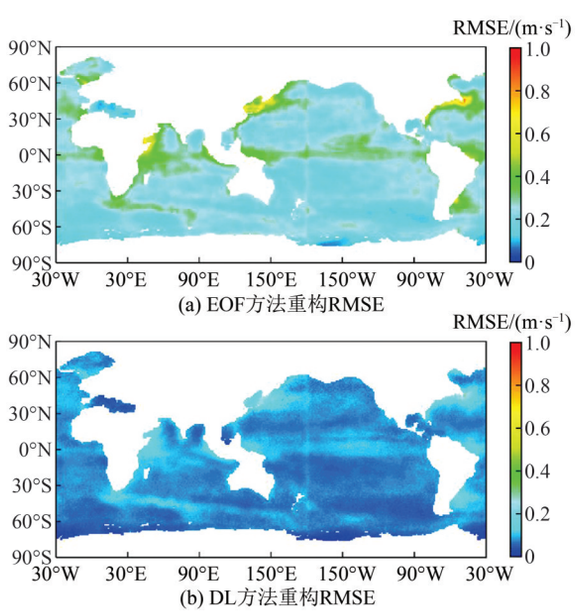


图4 训练集数据重构RMSE分布

Fig. 4 RMSE Distribution of Training Set Data Reconstruction

2.3　测试集重构结果分析

在测试集中,基于训练集的EOF和DL基函数分别采用最小二乘法、正交匹配追踪算法求解测试集中声速数据的系数矩阵,进而重构测试集中的声速数据。在对测试集重构结果进行误差分析时,将从水平方向、深度方向以及时间维度进行分析。

2.3.1　水平方向分析

在水平方向分析中,统计了两种方法在全球海洋的整体重构RMSE,如图5所示。可以发现,EOF的测试集与训练集的重构RMSE分布趋势相同,而且误差量级基本保持一致,表明训练集的EOF基函数能够有效提取SVP的时序变化特征,在测试集中依然能够保持稳定的重构能力。DL的测试集与训练集的重构RMSE分布趋势同样相同,但误差量级得到了不同程度的增大,主要集中在训练集中误差较大的区域,表明训练集的DL基函数对训练集重构存在过拟合,在测试集中不能维持同样精度的重构结果。对比EOF和DL的测试集重构误差,尽管DL测试集的重构误差有所提升,但相比EOF方法,无论是在沿岸附近,还是在开阔的大洋中,DL能够表现出更高精度的重构结果。

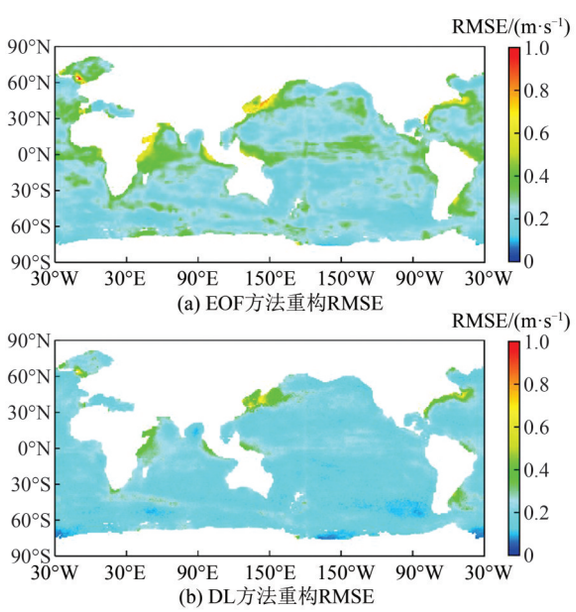


图5　测试集数据重构RMSE分布

Fig. 5　RMSE Distribution of Test Set Data Reconstruction

2.3.2　时间维度和深度方向分析

在时间维度和深度方向分析中,本文在全球范围内均匀选取了4处位置,坐标分别为(80°E, 0°N)、(179°W, 40°N)、(130°W, 60°S)、(15°W, 30°S),以此来研究测试集的重构结果随时间和深度变化的特性。图6为这4个位置的声速真实值以及与重构结果之间的声速差值。由图6(a)可以发现,SVP的结构在不同位置呈现出不同的特性,表现出明显的差异,这主要与所处的地理纬度有关。图6(b)展示了4个位置的SVP差值。从整体上看,不同位置的声速差值在水深2 000 m范围内均表现出波动特征,声速差值在浅层(0~500 m)波动较大,在深层(1 500~2 000 m)趋于平缓。在(80°E,0°N),两种方法的误差曲线趋势整体相同,EOF方法在浅水层和中间水层的误差相对更大;在(179°W,40°N),声速误差的波动相对较小,对比两种方法,DL在水深[0,1 000] m内能够取得更优的重构结果,在(1 000,2 000] m内两种方法的误差较为接近;在(130°W, 60°S),两种方法误差波动幅度接近,表现得较为吻合;(15°W, 30°S)的声速误差曲线分布与(179°W, 40°N)的相似,随深度变化呈现不同的误差分布。总体来看,DL方法在整体深度范围内的重构误差均小于EOF方法,特别是在潜水层和中水层表现尤为优越。不同位置的分析也显示,DL方法在不同海域和深度的重构精度较为稳定,而EOF方法的重构效果相对不佳。

图7展示了4个位置处两种方法重构RMSE随时间的变化情况,整体趋势表明,DL方法的RMSE均低于EOF方法,表明DL方法在这些位置上的重构误差更小,重构效果更好。在所有4个位置上,EOF方法的RMSE波动较大,特别是在一些月份,RMSE达到了0.5 m/s以上。相比之下,DL方法的重构误差曲线相对平滑,大多数月份都能保持在0.2 m/s,表明DL方法的基函数对于重构时变SVP具有更好的稳定性和较低的重构误差。

3　三维声速数据稀疏表示

3.1　实验数据预处理

本文选择太平洋中部(120°W至180°W,30°N至30°S)、水深0~2 000 m的海域作为实验区域。该位置海面开阔,水深适宜,海洋物理过程丰富,声速时空变化显著,适合于三维声速数据的稀疏表示研究。将实验数据划分为训练集和测试集,训练集数据为2021年1月份的月平均声速数据,测试集时间跨度为2021-02—2022-09,包含20个逐年逐月的SVF数据。鉴于EOF与DL方法只适用于处理二维声速矩阵,在稀疏表示的

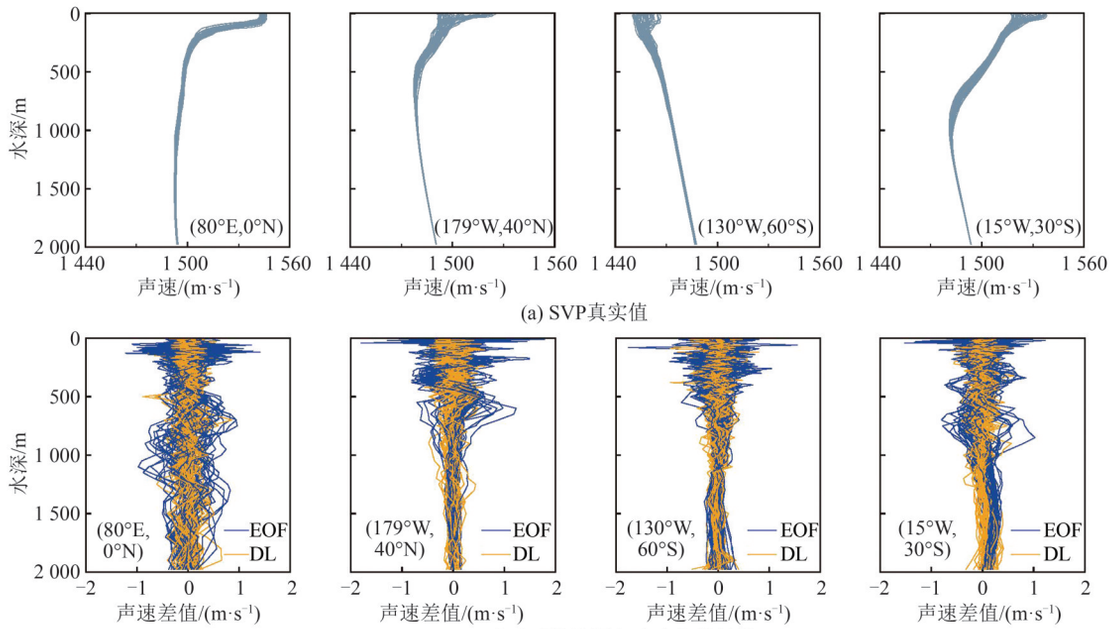


图6 声速重构结果深度方向误差分析

Fig. 6 Depth Direction Error Analysis of Sound Velocity Reconstruction Results

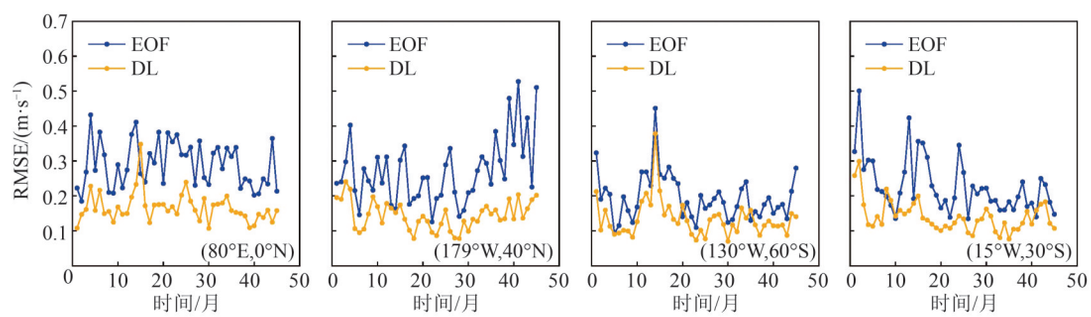


图7 声速重构结果时间维度误差分析

Fig. 7 Time Dimension Error Analysis of Sound Velocity Reconstruction Results

过程中需要对三维声速数据矩阵化,在结果分析中再恢复至原来的三维形状。

3.2 训练集数据稀疏表示

本节主要研究了EOF、DL和TD 3种方法对三维声速数据的稀疏表示。通过对训练集中的三维SVF稀疏表示,学习3种方法的基函数,进而分析不同方法用于重构测试集声速的性能。在使用EOF稀疏表示时,为了确定基函数的阶数,计算了不同阶数EOF的贡献率,如图8所示。可以发现前6阶EOF可以实现99%的累积贡献率,在后续的实验中将EOF阶数设置为6和7,DL的稀疏度保持与EOF的阶数一致,两种方法的参数数量保持相等,表2给出了不同阶数的参数数量和训练集重构RMSE。

由于实验区域内SVF的3个维度形状接近,本文将TD中3个维度的多维线性秩设置相等,使用不同数值的多维线性秩对训练集数据进行TD,并计算重构结果的整体RMSE,如图9所示。可以发现,随着多维线性秩数值的增加,重构误差逐步降低,同时伴随着参数数量的直线上升。当多维线性秩为30和35时,RMSE逐渐趋于平稳,因此在后续的实验中将多维线性秩设置为30和35,对应的参数数量和重构RMSE见表2。

表2对比了不同方法的参数数量和RMSE,可以发现,DL在与EOF参数相等的情况下,对三维SVF依然可以实现更好的重构结果,能够保持与二维SVP较为接近的重构RMSE。相比之下,TD方法的参数数量相比前两种方法得到了大幅度降低,且可以实现误差低于0.05 m/s的重构结果,表明TD可以充分捕捉声速的三维空间变化,能够有效恢复原始声速数据。

3.3 测试集重构结果分析

在完成训练集数据的稀疏表示之后,利用学习到的基函数分别通过最小二乘法、正交匹配追

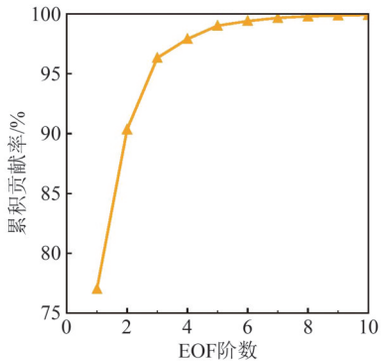


图 8　不同 EOF 阶数的累积贡献率

Fig. 8　Cumulative Contribution Rate of Different Order EOF

表 2　3种稀疏表示方法的参数信息

Table 2　Parameter Information for Three Sparse Representation Methods

方法	超参数	参数数量/个	RMSE/(m·s^{-1})
EOF	K=6	21 600	0.550
EOF	K=7	25 200	0.411
DL	T=6, H=100	21 600	0.195
DL	T=7, H=100	25 200	0.189
TD	R_1=R_2=R_3=30	5 340	0.039
TD	R_1=R_2=R_3=35	6 230	0.026

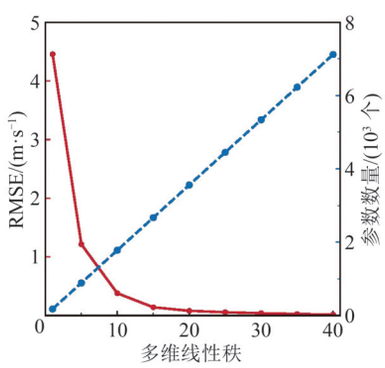


图 9　不同多维线性秩的参数数量和重构 RMSE

Fig. 9　The Number of Parameters and the Reconstructed RMSE Corresponding to Different Ranks

踪算法、交替最小二乘法求解 EOF、DL 和 TD 3 种方法对应的测试集系数矩阵,进而对测试集中 20 个月的三维 SVF 进行重构。通过与真实声速对比,进一步对测试集重构结果进行误差分析,首先进行整体误差分析,然后从时间维度、水平方向和深度方向 3 个方面进行分析,以充分了解 3 种方法的稀疏表示性能及适用性。

3.3.1　整体误差分析

表 3 给出了 3 种方法基于不同参数对测试集数据重构结果的整体 RMSE、MAE 与 MAPE。相比之下,TD 方法能够在所有指标上实现误差最小,DL 方法次之,EOF 方法的误差最大。但与训练集重构 RMSE 相比,3 种方法的测试集重构误差均有了一定程度的增加。图 10 统计了重构结果与声速真值之间差值的分布区间,可以看到 TD 方法的重构结果中约有 75% 的声速差值在 0.2 m/s 以内,能够实现约 99% 的声速差值在 0.4 m/s 以内,远超过另外两种方法。

表 3　重构结果整体误差分析

Table 3　Overall Error Analysis of Reconstruction Results

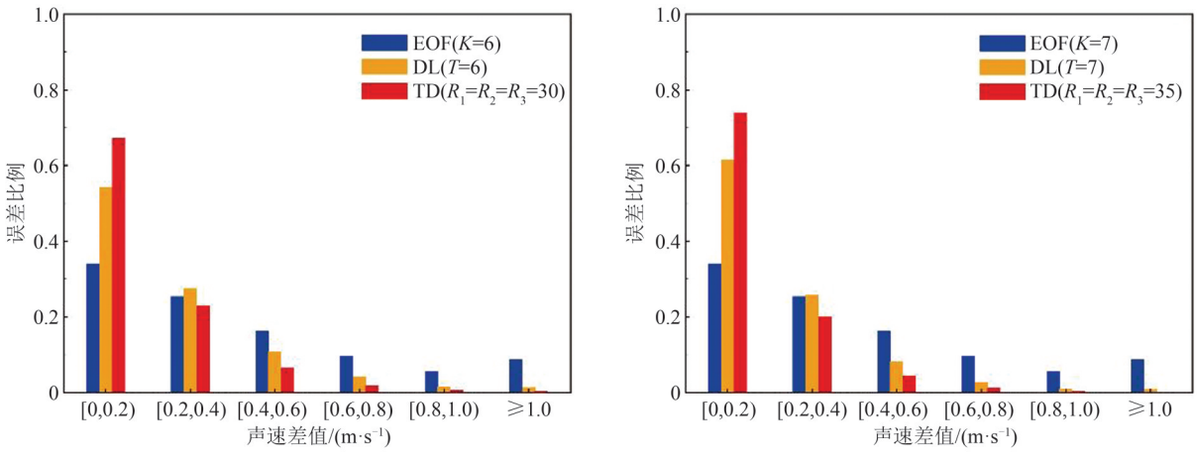
方法	超参数	RMSE / (m·s^{-1})	MAE/ (m·s^{-1})	MAPE/ %
EOF	K=6	0.615	0.434	29
EOF	K=7	0.464	0.320	21
DL	T=6, H=100	0.342	0.244	16
DL	T=7, H=100	0.296	0.207	14
TD	R_1=R_2=R_3=30	0.250	0.180	12
TD	R_1=R_2=R_3=35	0.211	0.152	10

3.3.2　时间维度分析

从时间维度上分析,图 11 统计了测试集 20 个月份的声速重构整体 RMSE。可以发现,3 种方法的重构误差曲线呈现明显的差异。当采用前 6 阶 EOF 时,EOF 方法的重构 RMSE 在 0.6 m/s 上下波动;当采用前 7 阶 EOF 时,重构 RMSE 得到了一定程度的降低,但也均大于 0.4 m/s。此外,EOF 方法的误差曲线波动较大,不同月份的重构 RMSE 差异最大超过 0.1 m/s。DL 方法在稀疏度为 6 和 7 时,重构误差差异不是很大,大多数 RMSE 均位于 0.3~0.4 m/s 之间,不同月份的重构 RMSE 同样存在差异,但与 EOF 方法相比误差曲线较为平缓。TD 方法的重构误差曲线相对稳定,随时间变化波动较小,重构 RMSE 均小于 0.3 m/s。当多维线性秩从 30 增加到 35 时,误差曲线可以看作向下平移了约 0.05 m/s。总体来说,TD 方法可以实现误差最小的重构结果,而且在不同月份间表现得较为稳定。

3.3.3　水平方向分析

在水平方向和水深方向上,仅对重构结果更好的情况进行分析,即采用 EOF 阶数和 DL 稀疏度为 7、多维线性秩为 35 时的重构结果。图 12 展示了 EOF、DL 和 TD 3 种方法在 2021 年 8 月份声速重构结果的不同深度(30 m、100 m、400 m、1 200 m)水平切片,以及对应的声速真实值。在水深 30 m 处,3 种方法的重构结果与真实值相比整体趋势保持一致,但 TD 能够捕捉到边缘的一些细节特征。例如在(120°E,10°N)周围的声速低值区,只有 TD 方法能够实现精准重构;在



(a) K=6,T=6,R_1=R_2=R_3=30时误差分布　(b) K=7,T=7,R_1=R_2=R_3=35时误差分布

图10　声速重构结果误差区间分布

Fig. 10　Distribution of Error Intervals for Sound Velocity Reconstruction Results

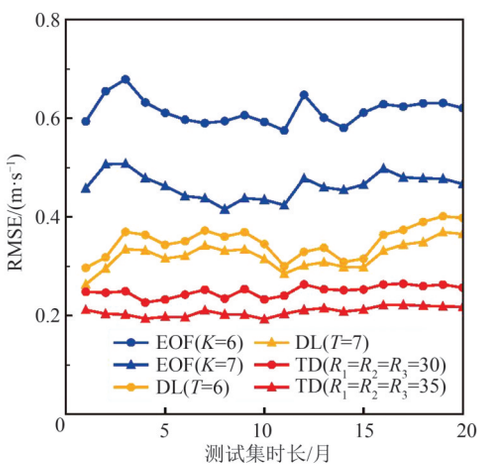


图11　声速重构结果时间维度误差分析

Fig. 11　Time Dimension Error Analysis of Sound Velocity Reconstruction Results

100 m和400 m处,3种方法的重构结果差异不大,均能有效捕捉声速的空间变化特征,与真实值较为接近;在1 200 m处,3种方法的重构结果差异较大,EOF的重构结果与真实值存在明显的偏差,DL的重构结果虽然整体趋势上与真实相对契合,但重构结果较为模糊,对于一些细节表示不够准确,TD的重构结果与真实值几乎一致,表现最好。

3.3.4　深度方向分析

从深度方向对测试集重构结果进行精度评价,图13展示了3种方法在不同水层深度处的RMSE。可以发现,3种方法的重构RMSE随着深度的变化呈现先增大后减小的趋势。在海水表面层,EOF的重构RMSE接近0.4 m/s,DL的重构RMSE接近0.3 m/s,TD的重构RMSE约为0.2 m/s;在温跃层中,声速受海水温度的变化而急剧波动,使得3种方法的重构误差均急剧增大。在100～400 m水深区间,EOF的重构RMSE波动较大,最大值超过了0.9 m/s,DL的重构RMSE相对趋于稳定,但最大值也超过了0.5 m/s,相比之下TD方法的重构RMSE能够稳定的维持在0.3 m/s,随着深度的增加缓慢较小;在深海层中,3种方法的重构RMSE逐渐趋于稳定,TD方法的重构RMSE逐渐稳定到0.1 m/s。

4　结　语

本文基于EOF、DL和TD 3种稀疏表示方法,利用全球Argo网格数据研究了二维SVP和三维SVF的稀疏表示和数据重构。在二维SVP的稀疏表示中,本文采用EOF和DL方法对全球海洋网格中SVP时间序列进行稀疏表示和数据重构。研究表明,DL方法能够在全球范围内实现更优的重构结果,整体深度范围内的重构误差均小于EOF方法,特别是在潜水层和中层表现尤为优越,而且DL的基函数对于重构时变SVP具有更好的稳定性和较低的重构误差。对于三维海洋SVF,研究了中部太平洋区域SVF的稀疏表示。在整体误差分析中,TD方法通过多个因子矩阵能够捕获声速的三维空间变化,在参数数量大幅下降的情况下能够在所有指标上实现最优。在不同维度的分析中,TD方法受时间变化、空间差异和深度变化的影响相对较小,能够实现稳定、精度更高的重构结果。因此,在声速反演研究以及声速数据分析处理的过程中,选用适当的稀疏表示方法可以更好地重构真实数据。

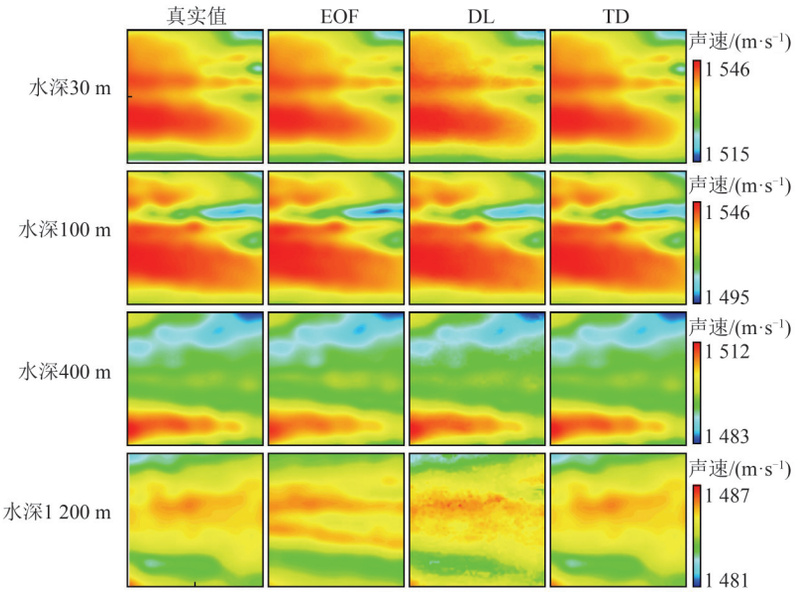


图 12　声速真实值与重构结果分别在水深 30 m、100 m、400 m、1 200 m 处的水平切片

Fig. 12　Horizontal Slices of Real and Reconstructed Sound Velocities at Water Depths of 30 m, 100 m, 400 m, and 1 200 m

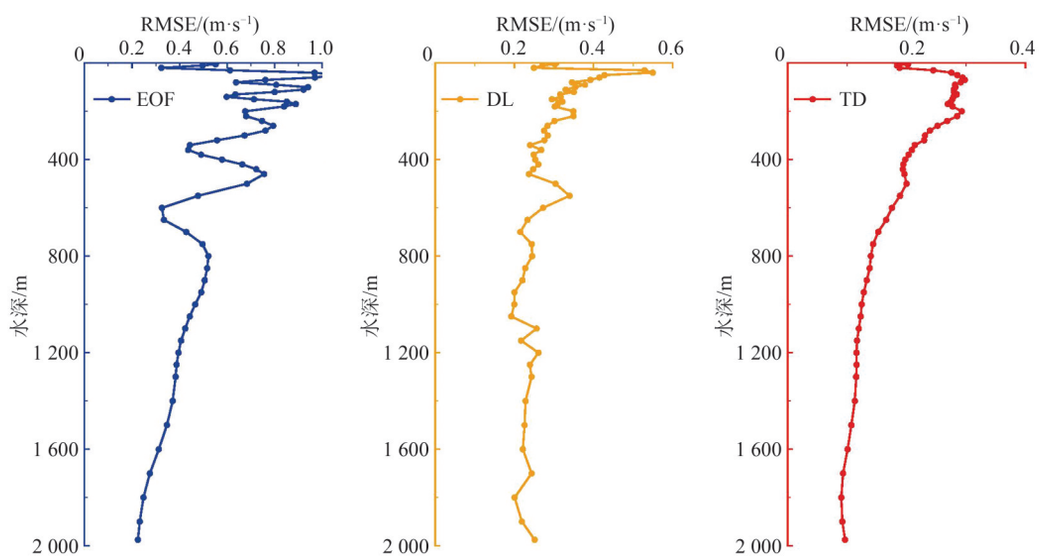


图 13　声速重构结果深度方向误差分析

Fig. 13　Depth Direction Error Analysis of Sound Velocity Reconstruction Results

参　考　文　献

[1]　杨元喜，刘焱雄，孙大军，等. 海底大地基准网建设及其关键技术[J]. 中国科学：地球科学，2020，50(7)：936-945.
YANG Yuanxi, LIU Yanxiong, SUN Dajun, et al. Seafloor Geodetic Network Establishment and Key Technologies[J]. *Scientia Sinica* (*Terrae*), 2020, 50(7): 936-945.

[2]　陈冠旭，刘杨，李梦昊，等. GNSS-声学海底定位的声速误差处理方法综述[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2022(9)：1349-1363.
CHEN Guanxu, LIU Yang, LI Menghao, et al. Review on the Processing Methods of Sound Speed Errors in GNSS-Acoustic Seafloor Positioning[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022(9): 1349-1363.

[3]　郭金库. 信号稀疏表示理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2013.
GUO Jinku. Signal Sparse Representation Theory and Its Application[M]. Beijing: Science Press, 2013.

[4]　CHENG L, JI X Y, ZHAO H F, et al. Tensor-Based Basis Function Learning for Three-Dimensional Sound Speed Fields[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2022, 151(1): 269-285.

[5]　李倩倩，朱金龙，罗宇，等. 海水声速剖面基函数

的重构性能分析[J]. 海洋学报, 2023, 45(11): 34-44.
LI Qianqian, ZHU Jinlong, LUO Yu, et al. Reconstruction Performance Analysis for Basis Function of the Sound Speed Profile[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2023, 45(11): 34-44.

[6] BIANCO M, GERSTOFT P. Dictionary Learning of Sound Speed Profiles[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2017, 141(3): 1749.

[7] 李倩倩, 李宏琳, 曹守莲, 等. 基于遥感数据和表层声速的全海深声速剖面反演[J]. 海洋学报(中文版), 2022, 44(12): 84-94.
LI Qianqian, LI Honglin, CAO Shoulian, et al. Inversion of the Full-Depth Sound Speed Profile Based on Remote Sensing Data and Surface Sound Speed[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2022, 44(12): 84-94.

[8] 冯西安, 寇思玮, 谭伟杰, 等. 水声信号处理中的稀疏表示理论及应用[J]. 电子学报, 2021, 49(9): 1840-1851.
FENG Xi'an, KOU Siwei, TAN Weijie, et al. Sparse Representation Theory and Application in Underwater Acoustic Signal Processing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(9): 1840-1851.

[9] 寇思玮, 冯西安, 毕杨, 等. 水声信号稀疏重构高分辨角度-多普勒成像[J]. 声学学报, 2021, 46(4): 519-528.
KOU Siwei, FENG Xi'an, BI Yang, et al. High-Resolution Angle-Doppler Imaging by Sparse Recovery of Underwater Acoustic Signals[J]. *Acta Acustica*, 2021, 46(4): 519-528.

[10] 丁继胜, 周兴华, 唐秋华, 等. 多波束勘测声速剖面场的EOF表示方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(5): 446-449.
DING Jisheng, ZHOU Xinghua, TANG Qiuhua, et al. Expression of Multi-Beam Echo Sounding Sound Velocity Profile with Empirical Orthogonal Functions[J]. *Geomatics and Information Science of Wunan University*, 2007, 32(5): 446-449.

[11] 张志伟, 暴景阳, 肖付民, 等. 利用模拟退火算法反演多波束测量声速剖面[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(8): 1234-1241.
ZHANG Zhiwei, BAO Jingyang, XIAO Fumin, et al. Inversion of Sound Velocity Profile in Multibeam Survey Based on Simulated Annealing Algorithm[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(8): 1234-1241.

[12] 袁浩, 贾帅东, 金绍华, 等. 利用GA-NN模型反演声速剖面的众源水深数据声速改正[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(3): 377-385.
YUAN Hao, JIA Shuaidong, JIN Shaohua, et al. Correction for Crowd Sourced Bathymetry Data Using GA-NN Model to Inverse Sound Velocity Profiles[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(3): 377-385.

[13] 孙文川, 暴景阳, 金绍华, 等. 多波束海底地形畸变校正与声速剖面反演[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(3): 349-355.
SUN Wenchuan, BAO Jingyang, JIN Shaohua, et al. Inversion of Sound Velocity Profiles by Correcting the Terrain Distortion[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2016, 41(3): 349-355.

[14] 周士弘, 张茂有, 周曰鹏. 海洋声速场的经验正交函数描述及声速剖面预报[J]. 海洋通报, 1999, 18(5): 27-34.
ZHOU Shihong, ZHANG Maoyou, ZHOU Yuepeng. Study on Empirical Orthogonal Functions Expression and Prediction of the Sound Speed Field[J]. *Marine Science Bulletin*, 1999, 18(5): 27-34.

[15] 张林虎, 刘杨, 刘焱雄, 等. 基于分层EOF的深海声速剖面时变特征建模[J]. 海岸工程, 2022, 41(3): 209-222.
ZHANG Linhu, LIU Yang, LIU Yanxiong, et al. Modeling of Time-Varying Characteristics of Deep-Sea Sound Velocity Profile Based on Layered-EOF[J]. *Coastal Engineering*, 2022, 41(3): 209-222.

[16] DAVIS R E. Predictability of Sea Surface Temperature and Sea Level Pressure Anomalies over the North Pacific Ocean[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1976, 6(3): 249-266.

[17] LEBLANC L R, MIDDLETON F H. An Underwater Acoustic Sound Velocity Data Model[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1980, 67(6): 2055-2062.

[18] SUN S J, ZHAO H F. Sparse Representation of Sound Speed Profiles Based on Dictionary Learning[C]//The 13th International Congress on Image and Signal Processing, BioMedical Engineering and Informatics, Chengdu, China, 2020.

[19] 汪恺, 李风华, 杨习山. 利用字典学习的浅海被动声层析[J]. 声学技术, 2022, 41(5): 637-641.
WANG Kai, LI Fenghua, YANG Xishan. Shallow Water Passive Acoustic Tomography Using Dictionary Learning[J]. *Technical Acoustics*, 2022, 41(5): 637-641.

[20] GERSTOFT P, MECKLENBRÄUKER C F, SEONG W, et al. Introduction to Compressive Sensing in Acoustics[J]. *The Journal of the Acousti-*

cal Society of America, 2018, 143(6): 3731-3736.

[21] BIANCO M, GERSTOFT P. Compressive Acoustic Sound Speed Profile Estimation[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, 139(3): EL90-EL94.

[22] CHOO Y, SEONG W. Compressive Sound Speed Profile Inversion Using Beamforming Results[J]. *Remote Sensing*, 2018, 10(5): 704.

[23] CHEN P Q, CHENG L, ZHANG T, et al. Tensor Dictionary Learning for Representing Three-Dimensional Sound Speed Fields[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2022, 152(5): 2601-2616.

[24] LI S Y, CHENG L, ZHANG T, et al. Striking the Right Balance: Three-Dimensional Ocean Sound Speed Field Reconstruction Using Tensor Neural Networks[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2023, 154(2): 1106-1123.

[25] 钟玮琪, 屈科, 梁羿. 基于经验正交函数的剖面重构及其物理意义分析[J]. 海洋技术学报, 2022, 41(1): 57-64.
ZHONG Weiqi, QU Ke, LIANG Yi. Profile Reconstruction Based on Empirical Orthogonal Function and Its Physical Meaning Analysis[J]. *Journal of Ocean Technology*, 2022, 41(1): 57-64.

[26] TOŠIĆ I, FROSSARD P. Dictionary Learning[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(2): 27-38.

[27] TROPP J A, GILBERT A C. Signal Recovery from Random Measurements *via* Orthogonal Matching Pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.

[28] MOTA J F C, XAVIER J M F, AGUIAR P M Q, et al. Distributed Basis Pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(4): 1942-1956.

[29] ENGAN K, AASE S O, HAKON HUSOY J. Method of Optimal Directions for Frame Design[C]//IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Phoenix, AZ, USA, 2002.

[30] ABDI H. Singular Value Decomposition (SVD) and Generalized Singular Value Decomposition (GSVD)[J]. *Encyclopedia of Measurement and Statistics*, 2007, 907(912): 44.

[31] KOLDA T G, BADER B W. Tensor Decompositions and Applications[J]. *SIAM Review*, 2009, 51(3): 455-500.

[32] ZHANG C L, WANG D Y, LIU Z H, et al. Global Gridded Argo Dataset Based on Gradient-Dependent Optimal Interpolation[J]. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2022, 10(5): 650.